Capítulo 7

Experimentos com dois ou três Fatores de Interesse

Gustavo Mello Reis
José Ivo Ribeiro Júnior

Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Informática
Setor de Estatística

Viçosa 2007

1. Dois Fatores

1.1. Interação AxB não Significativa

Como exemplo, considere um experimento fatorial 3 x 2, sendo o fator X composto de três tipos de zarcões de tinta e o fator XX de dois métodos de aplicação, instalado segundo o delineamento inteiramente casualizado com três repetições. O objetivo é de melhorar a adesão da tinta em superfícies de alumínio (Y) (Tabela 1).

Tabela 1. Dados da força de adesão

Tipo de zarcão	Método de aplicação					
	Imersão (I)			Aspersão (A)		
A	4,0	4,5	4,3	5,4	4,9	5,6
B	5,6	4,9	5,4	5,8	6,1	6,3
C	5,5	5,0	5,0	5,6	5,7	6,0

Para entrar com os dados no R, será utilizado o arquivo “dados2f.csv”, que será lido da seguinte forma:

```
dados.2f<-read.csv2("dados2f.csv", dec= ".")
dados.2f
TRAT  X  XX  XXX    Y
   1  A   I    1    4
   2  B   I    1  5.6
   3  C   I    1  5.5
   4  A   A    1  5.4
   5  B   A    1  5.8
   6  C   A    1  5.6
   1  A   I    2  4.5
   2  B   I    2  4.9
   3  C   I    2  5.0
   4  A   A    2  4.9
   5  B   A    2  6.1
   6  C   A    2  5.7
```

1	A	I	3	4.3
2	B	I	3	5.4
3	C	I	3	5.0
4	A	A	3	5.6
5	B	A	3	6.3
6	C	A	3	6.0

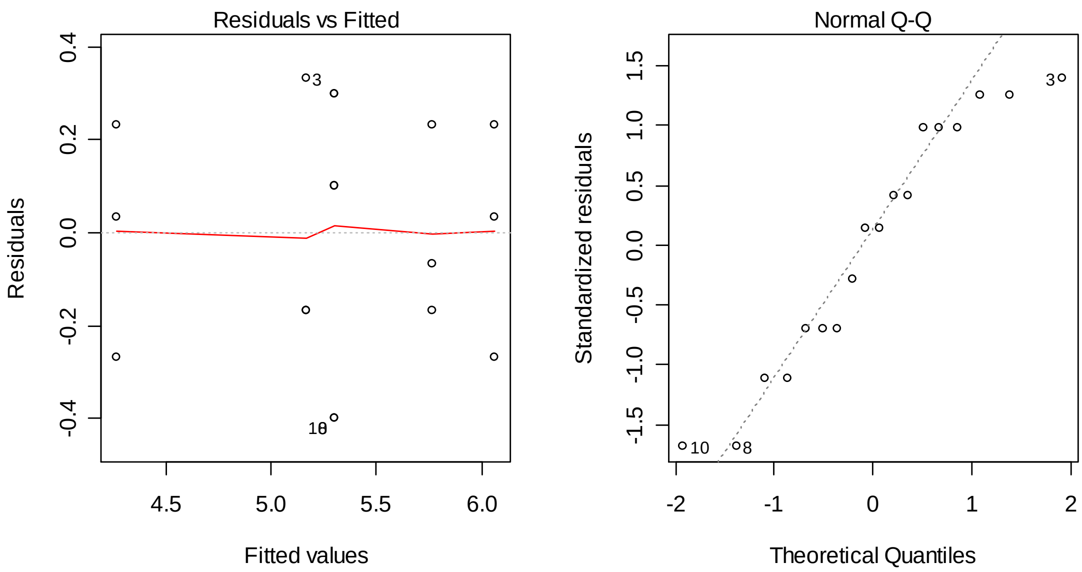
attach(dados.2f)

1.1.1. DIC

A montagem do modelo completo e os testes de normalidade e de homogeneidade de variâncias dos erros experimentais (Figura 1), serão feitos da seguinte forma:

```
mod.2f<-lm(Y~X*XX)     # Montar o modelo
re.2f<-residuals(mod.2f)     # Armazenar os resíduos no objeto re.2f
par(mfrow=c(1,2))     # Dividir a janela dos gráficos em duas partes
plot(mod.2f,which=c(1,2))     # Gerar os gráficos 1 e 2 para a análise dos resíduos
```

Figura 1 Gráficos de resíduos



O teste de Lilliefors é dado por:

```
library(nortest)   # Ativar o pacote nortest para aplicar o teste de Lilliefors
lillie.test(re.2f)   # Teste de Lilliefors
```

```
        Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test

data:  re.2f
D = 0.1621, p-value = 0.2404
```

O teste de Kolmogorov-Smirnov é dado por:

```
ks.test(re.2f, "pnorm", mean= 0, sd= sd(re.2f))
```

```
        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  re.2f
D = 0.1621, p-value = 0.7312
alternative hypothesis: two.sided
```

O teste de Bartlett é dado por:

```
bartlett.test(re.2f ,TRAT)
```

```
         Bartlett test of homogeneity of variances

data:  re.2f and TRAT
Bartlett's K-squared = 0.7892, df = 5, p-value = 0.9777
```

Assim, para $\alpha = 0,05$, os resíduos são normais e homogêneos. Logo, a anova é apresentada como segue:

anova(mod.2f)

```
Analysis of Variance Table

Response: Y
          Df  Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
X          2 2.64778 1.32389 15.4740 0.0004758 ***
XX         1 2.88000 2.88000 33.6623 8.448e-05 ***
X:XX       2 0.14333 0.07167  0.8377 0.4565219
Residuals 12 1.02667 0.08556
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Como pode-se observar, não existe (P < 0,05) interação entre os fatores X e XX. Outra forma de observar este resultado é através do gráfico de interação da seguinte forma:

```
mod.2f.fits<-lm(Y~X+XX)          # Modelo com os fatores significativos
re.2f.fits<-residuals(mod.2f.fits)   # Resíduos do modelo
f.mod.2f.fits<-Y-re.2f.fits           # Valores de Y ajustado pelo modelo
interaction.plot(X, XX, f.mod.2f.fits)   # Gráfico da interação X x XX
```

1.2. Interação AxB Significativa

Como exemplo, considere um experimento fatorial 3 x 2, sendo o fator X composto de três tipos de zarcões de tinta e o fator XX de dois métodos de aplicação, instalado segundo o delineamento inteiramente casualizado com três repetições. O objetivo é de melhorar a adesão da tinta em superfícies de alumínio (Y) (Tabela 2).

Tabela 2. Dados da força de adesão

Tipo de zarcão	Método de aplicação					
	Imersão (I)			Aspersão (A)		
A	4,0	4,5	4,3	5,4	4,9	5,6
B	5,6	4,9	5,4	5,8	6,1	6,3
C	5,5	5,0	5,0	3,8	3,7	4,0

Para entrar com os dados no R, será utilizado o arquivo “dados2f.csv”, que será lido da seguinte forma:

```
dados.2f<-read.csv2(“dados2f.csv”, dec= “.”)
dados.2f
```

TRAT	X	XX	XXX	Y
1	A	I	1	4
2	B	I	1	5.6
3	C	I	1	5.5
4	A	A	1	5.4
5	B	A	1	5.8
6	C	A	1	3.8
1	A	I	2	4.5
2	B	I	2	4.9
3	C	I	2	5.0
4	A	A	2	4.9
5	B	A	2	6.1
6	C	A	2	3.7
1	A	I	3	4.3
2	B	I	3	5.4
3	C	I	3	5.0
4	A	A	3	5.6
5	B	A	3	6.3
6	C	A	3	4.0

```
attach(dados.2f)
```

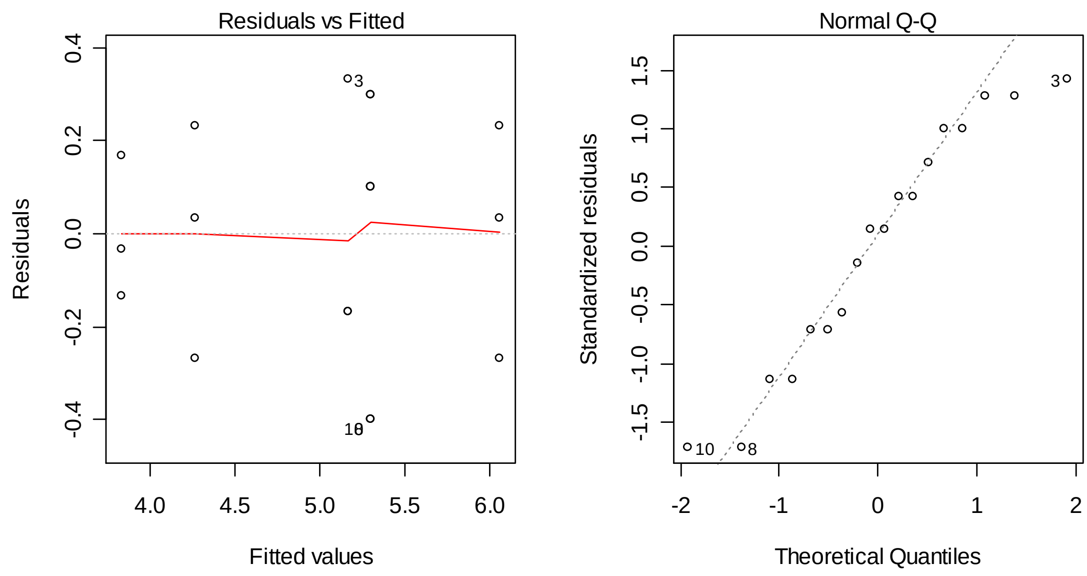
1.2.1. DIC

A montagem do modelo completo e os testes de normalidade e de homogeneidade de variâncias dos erros experimentais (Figura 2), serão feitos da seguinte forma:

```
mod.2f<-lm(Y~X*XX)     # Montar o modelo
re.2f<-residuals(mod.2f)      # Armazenar os resíduos no objeto re.2f
par(mfrow=c(1,2))               # Dividir a janela dos gráficos em duas partes
```

plot(mod.2f,which=c(1,2))   # Gerar os gráficos 1 e 2 para a análise dos resíduos

Figura 2. Gráficos de resíduos



O teste de Lilliefors é dado por:

library(nortest)   # Ativar o pacote nortest para aplicar o teste de Lilliefors
lillie.test(re.2f)   # Teste de Lilliefors

```
        Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test

data:  re.2f
D = 0.1114, p-value = 0.803
```

O teste de Kolmogorov-Smirnov é dado por:

ks.test(re.2f, "pnorm", mean= 0, sd= sd(re.2f))

```
        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  re.2f
D = 0.1114, p-value = 0.9788
alternative hypothesis: two.sided
```

O teste de Bartlett é dado por:

bartlett.test(re.2f ,TRAT)

```
        Bartlett test of homogeneity of variances

data:  re.2f and TRAT
Bartlett's K-squared = 1.4265, df = 5, p-value = 0.9214
```

Assim, para α = 0,05, os resíduos são normais e homogêneos. Logo, a anova é apresentada como segue:

anova(mod.2f)

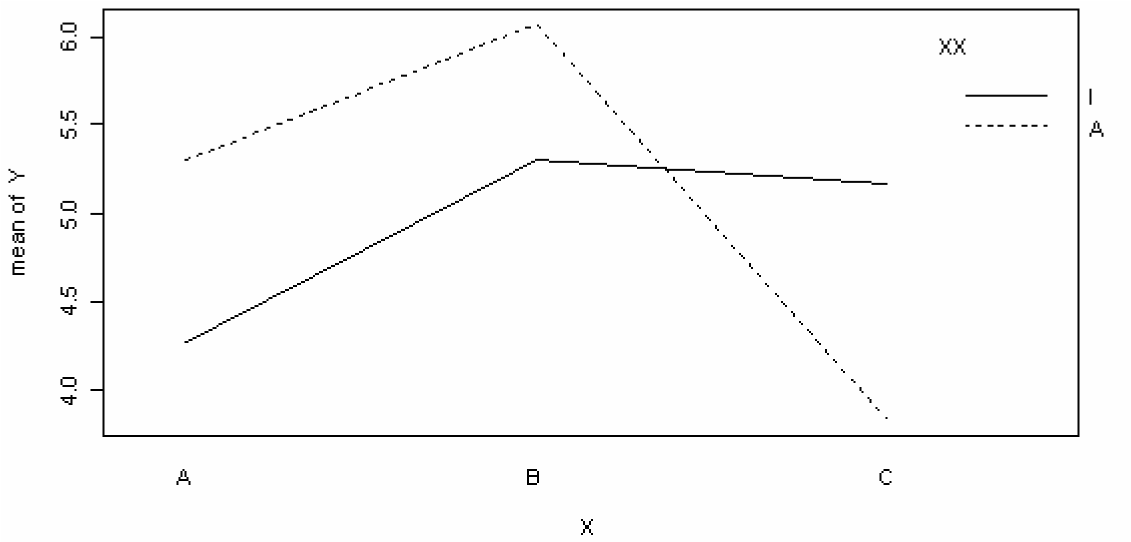
```
Analysis of Variance Table

Response: Y
          Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
X          2 4.5811  2.2906 27.8581 3.097e-05 ***
XX         1 0.1089  0.1089  1.3243    0.2722
X:XX       2 5.0411  2.5206 30.6554 1.923e-05 ***
Residuals 12 0.9867  0.0822
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Como pode-se observar, existe (P < 0,05) interação entre os fatores X e XX. Outra forma de observar este resultado é através do gráfico de interação (Figura 3) da seguinte forma:

interaction.plot(X, XX, Y)

Figura 3. Gráfico da interação entre os fatores X e XX



Para estudar os níveis do fator X dentro de cada nível de XX, têm-se:

mod.i<-lm(Y[XX= = “I”]~X[XX= = “I”])

anova(mod.i)

```
Analysis of Variance Table

Response: Y[XX == "I"]
             Df  Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
X[XX == "I"]  2 1.89556 0.94778  10.277 0.01154 *
Residuals     6 0.55333 0.09222
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

mod.a<-lm(Y[XX= = “A”]~X[XX= = “A”])

anova(mod.a)

```
Analysis of Variance Table

Response: Y[XX == "A"]
             Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
X[XX == "A"]  2 7.7267  3.8633  53.492 0.0001498 ***
Residuals     6 0.4333  0.0722
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Em função dos resultados das anovas realizadas, pode-se montar a Tabela 3 por meio do desdobramento da interação X*XX.

Tabela 3. ANOVA do fator X dentro dos níveis do fator XX

FV	GL	SQ	QM	F	$F_{tab,5\%}$
X/XX_I	2	1,8956	0,9478	11,53	3,89
X/XX_A	2	7,7267	3,8633	47,00	3,89
Resíduo	12	0,9867	0,0822	–	–

Para estudar os níveis do fator XX dentro de cada nível de X, têm-se:

mod.a<-lm(Y[X= = “A”]~XX[X= = “A”])
anova(mod.a)

```
Analysis of Variance Table

Response: Y[X == "A"]
             Df  Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
XX[X == "A"]  1 1.60167 1.60167  16.569 0.01522 *
Residuals     4 0.38667 0.09667
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

mod.b<-lm(Y[X= = “B”]~XX[X= = “B”])
anova(mod.b)

```
Analysis of Variance Table

Response: Y[X == "B"]
             Df  Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
XX[X == "B"]  1 0.88167 0.88167  9.1207 0.03916 *
Residuals     4 0.38667 0.09667
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

mod.c<-lm(Y[X= = “C”]~XX[X= = “C”])

anova(mod.c)

```
Analysis of Variance Table

Response: Y[X == "C"]
             Df  Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
XX[X == "C"]  1 2.66667 2.66667      50 0.002111 **
Residuals     4 0.21333 0.05333
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Em função dos resultados das anovas realizadas, pode-se montar a Tabela 4 por meio do desdobramento da interação X*XX.

Tabela 4. ANOVA do fator XX dentro dos níveis do fator X

FV	GL	SQ	QM	F	$F_{tab,5\%}$
XX/X_A	1	1,6017	1,6017	19,49	4,75
XX/X_B	1	0,8817	0,8817	10,73	4,75
XX/X_C	1	2,6667	2,6667	32,45	4,75
Resíduo	12	0,9867	0,0822	–	–

1.2.2. DBC

Como exemplo será utilizado os mesmos dados apresentados no tópico anterior. Porém, os níveis do fator XXX serão considerados como blocos, e como este está representado por valores numéricos, é necessário transforma-lo em fator, para que o R reconheça-o como sendo qualitativo, como segue:

XXXql<-factor(XXX)

O modelo completo e as análises de resíduos serão feitos da seguinte forma:

mod.2fdbc<-lm(Y~X*XX+XXXql)
re.2fdbc<-residuals(mod.2fdbc)

```
par(mfrow=c(1,2))
plot(mod.2fdbc, which=c(1,2))
# Teste de Lilliefors
library(nortest)
lillie.test(re.2fdbc)
# Teste de Kolmogorov-Smirnov
ks.test(re.2fdbc, “pnorm”, mean=mean(re.2fdbc), sd=sd(re.2fdbc))
# Teste de Bartlett
bartlett.test(re.2fdbc,TRAT)
```

Para α = 0,05, os resíduos são normais e homogêneos, pelo teste de Lilliefors (P > 0,05) e de Bartlett (P > 0,05). Desse modo, a anova é apresentada como segue:

```
anova(mod.2fdbc)
```

```
Analysis of Variance Table

Response: Y
          Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
X          2 4.5811  2.2906 28.9130 6.967e-05 ***
XX         1 0.1089  0.1089  1.3745    0.2682
XXXql      2 0.1944  0.0972  1.2272    0.3337
X:XX       2 5.0411  2.5206 31.8163 4.620e-05 ***
Residuals 10 0.7922  0.0792
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

O gráfico da interação entre os fatores X e XX, pode ser obtido por:

```
interaction.plot(X, XX, Y)
```

1.3. Superfície de Resposta

A metodologia da superfície de resposta é útil para a modelagem e análise nas aplicações em que a resposta de interesse seja influenciada por duas variáveis com mais de dois níveis quantitativos.

Nesse estudo, a maior superfície de resposta é dada por:

$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \beta_3 XX + \beta_4 XX^2 + \beta_5 X*XX + erro$

Como exemplo será utilizado o arquivo de dados “super.csv”, que contém os dados de um processo químico, onde as variáveis respostas viscosidade (Y) e conversão (YY) foram medidas em função das variáveis independentes tempo de reação (X) e temperatura (XX).

A entrada dos dados no R será feita da seguinte forma:

```
dados.super<-read.csv2("super.csv",dec= ".")
dados.super
   X   XX    Y    YY
  50  160   35  65.3
  60  160   39  68.2
  50  170   36  66.0
  60  170   43  69.8
  48  165   30  64.5
  62  165   44  69.0
  55  158   31  64.0
  55  172   45  68.5
  55  165   37  68.9
  55  165   34  69.7
  55  165   35  68.5
  55  165   36  69.4
  55  165   37  69.0
attach(dados.super)
```

1.3.1. Superfície de 1º Grau

Para gerar a superfície de resposta de Y em função de X e XX, serão feitos os seguintes passos:

```
# Criar vetores contendo os fatores X e XX ao quadrado
X2<-X^2
XX2<-XX^2
# Criar vetor com a interação X*XX
XXX<-X*XX
# Montar a superfície completa
mod.y.comp<-lm(Y~X+X2+XX+XX2+XXX) # Modelo de regressão completo
```

De acordo com o teste t, apresentado pelo comando summary, será retirado um fator de cada vez, começando a partir do mais complexo de interpretação e que seja não significativo (P > α). No exemplo têm-se:

summary(mod.y.comp)

```
Call:
lm(formula = Y ~ X + X2 + XX + XX2 + XXX)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.0090 -1.7943  0.2057  1.2057  3.3201

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 1683.71923 1184.78573   1.421    0.198
X             -7.68659    9.47433  -0.811    0.444
X2             0.03190    0.03930   0.812    0.444
XX           -18.29144   13.27050  -1.378    0.211
XX2            0.05231    0.03930   1.331    0.225
XXX            0.03000    0.05108   0.587    0.575

Residual standard error: 2.554 on 7 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.8223,     Adjusted R-squared: 0.6953
F-statistic: 6.477 on 5 and 7 DF,  p-value: 0.01470
```

Retirar a interação entre os fatores X e XX do modelo

mod.y1<-lm(Y~ X+X2+XX+XX2)

summary(mod.y1)

```
Call:
lm(formula = Y ~ X + X2 + XX + XX2)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.0090 -1.7943  0.2057  1.2057  4.0701

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 1411.46923 1044.73023   1.351    0.214
X             -2.73659    4.14568  -0.660    0.528
X2             0.03190    0.03765   0.847    0.421
XX           -16.64144   12.42730  -1.339    0.217
XX2            0.05231    0.03765   1.389    0.202

Residual standard error: 2.447 on 8 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.8135,     Adjusted R-squared: 0.7203
F-statistic: 8.724 on 4 and 8 DF,  p-value: 0.005146
```

Retirar o fator X2 do modelo

mod.y2<-lm(Y~ X+XX+XX2)

summary(mod.y2)

```
Call:
lm(formula = Y ~ X + XX + XX2)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.3653 -1.3386 -0.3386  0.6920  4.4192

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 1211.00996 1001.50700   1.209  0.25740
X              0.77273    0.17118   4.514  0.00146 **
XX           -15.37480   12.14211  -1.266  0.23722
```

```
XX2           0.04847    0.03679   1.318  0.22021
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.409 on 9 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.7968,     Adjusted R-squared: 0.729
F-statistic: 11.76 on 3 and 9 DF,  p-value: 0.001816
```

# Retirar o fator XX2 do modelo
mod.y3<-lm(Y~ X+XX)
summary(mod.y3)

```
Call:
lm(formula = Y ~ X + XX)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.0769 -1.6678 -0.3193  1.1655  4.8928

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -107.9231    30.8558  -3.498  0.00575 **
X              0.7727     0.1774   4.357  0.00143 **
XX             0.6212     0.1774   3.502  0.00570 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.496 on 10 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.7576,     Adjusted R-squared: 0.7091
F-statistic: 15.62 on 2 and 10 DF,  p-value: 0.0008375
```

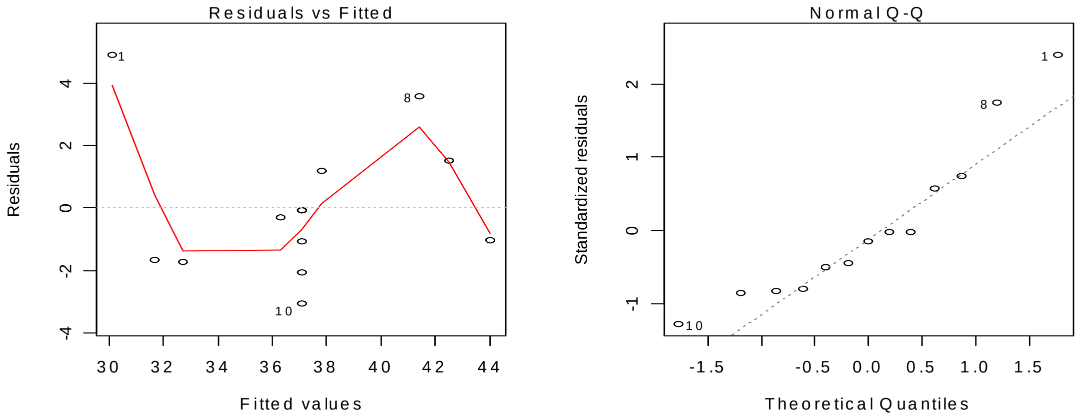
O modelo final é aquele que contém somente fatores significativos ($P \leq \alpha$) pelo teste t. No exemplo, tem-se:

mod.y<-mod.y3

Porém antes da interpretação dos resultados, é necessário verificar se as pressuposições de normalidade e homogeneidade de variâncias dos erros experimentais são satisfeitas (Figura 4):

```
par(mfrow=c(1,2))
plot(mod.y, which=c(1,2))
```

Figura 4. Gráficos dos resíduos



anova(mod.y)   # Verificar pelo teste F que as variáveis X e XX são significativas

```
Analysis of Variance Table

Response: Y
          Df  Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
X          1 118.227 118.227  18.981 0.001428 **
XX         1  76.409  76.409  12.267 0.005703 **
Residuals 10  62.287   6.229
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

summary(mod.y)

```
Call:
lm(formula = Y ~ X + XX)

Residuals:
```

```
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.0769 -1.6678 -0.3193  1.1655  4.8928

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -107.9231    30.8558  -3.498  0.00575 **
X              0.7727     0.1774   4.357  0.00143 **
XX             0.6212     0.1774   3.502  0.00570 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.496 on 10 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.7576,     Adjusted R-squared: 0.7091
F-statistic: 15.62 on 2 and 10 DF,  p-value: 0.0008375
```

De acordo com os testes F e t, conclui-se que as variáveis X e XX exercem efeitos (P < 0,05).

Os coeficientes de regressão serão armazenados em uma variável, para serem usados na montagem da superfície de resposta de Y em função de X e XX.

```
co.y<-coef(mod.y)    # Armazenar os coeficientes no objeto co.y
co.y                 # Visualizar os coeficientes
```

```
(Intercept)           X          XX
-107.9230769    0.7727273    0.6212121
```

Serão criados dois vetores (x e xx) contendo 15 coordenadas igualmente espaçadas por onde o plano será traçado pelos eixos X e XX, respectivamente:

```
x<-seq(min(X), max(X), (max(X) - min(X)) / 15)
xx<-seq(min(XX), max(XX), (max(XX) - min(XX)) / 15)
```

A forma geral da função anterior é: seq(de tanto, até tanto, espaçados por tanto).

Agora será criada a função utilizando os coeficientes da regressão:

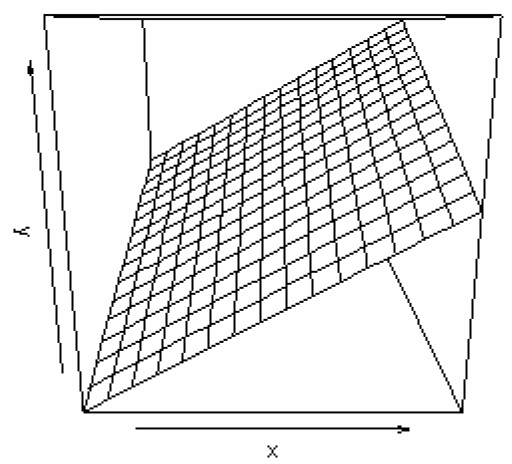
```
f.y<-function(x,xx) {co.y[1] + co.y[2]*x + co.y[3]*xx } # Função estimada
```

y<-outer(x,xx,f.y)   # Fazer combinações de cada valor de x aos de xx com a função f.y

A superfície de resposta será construída da seguinte forma:

persp(x,xx,y)   # Construir a superfície de resposta (Figura 5)

Figura 5. Superfície de resposta de Y em função de X e XX



Para melhorar a aparência e a visualização da superfície de resposta, podem ser utilizados os argumentos apresentados a seguir:

a) main e sub: título principal e rodapé, respectivamente;

b) xlab, ylab e zlab: nomes dos eixos x, y e z, respectivamente;

c) col: cor para a superfície de resposta;

d) phi: valor para o anglo que gira a figura no sentido vertical;

e) theta: valor para o anglo que gira a figura no sentido horizontal;

f) ticktype: pode receber os valores “simple” ou “detailed”, sendo que o primeiro indica que os eixos irão ter apenas uma seta indicando o sentido crescente deste (figura 6.7) e o segundo indica que os valores devem aparecer nos seus respectivos eixos (figura 6.8);

g) expand: proporção para o tamanho do eixo z em relação aos eixos x e y, para valores entre 0 e 1 o eixo z diminui e para valores maiores que 1 o eixo z aumenta;

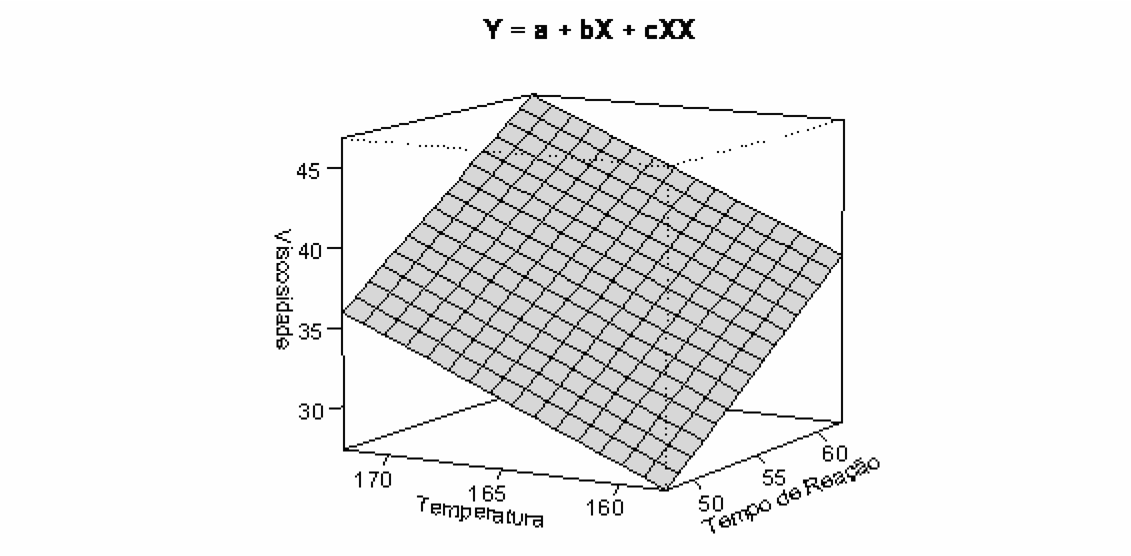
h) d: serve para redimensionar o gráfico, de acordo com diferentes valores numéricos;

j) r: também redimensiona o gráfico, porém em outras partes de acordo com diferentes valores numéricos.

Uma forma melhorada desta superfície de resposta (Figura 6) poderia ser obtida pelo comando abaixo:

persp(x, xx, y, main= “Y = a + bX + cXX”, xlab= “Tempo de Reação”, ylab= “Temperatura”, zlab= “Viscosidade”, col= “lightgrey”, phi=10, theta=300, ticktype= “detailed”, expand=0.75, d=20, r=10)

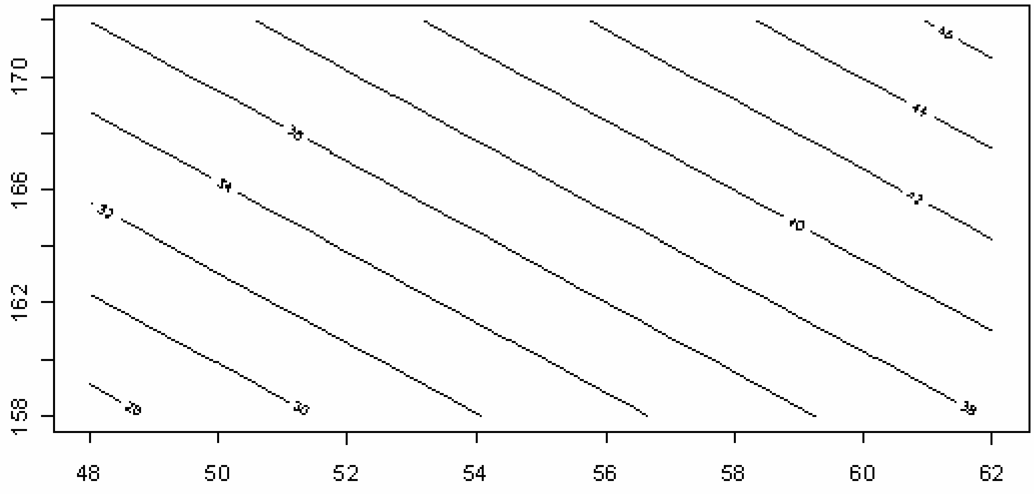
Figura 6. Superfície de resposta melhorada



Para construir o gráfico de contorno (Figura 7), será utilizado o comando a seguir:

contour(x,xx,y)

Figura 7. Gráfico de contorno de Y em função de X e XX



1.3.2. Superfície de 2º Grau

Para gerar a superfície de resposta de YY em função de X, XX, X^2 e XX^2, deve-se confirmar, a priori, pelo teste t, que todos esses fatores são significativos ($P \leq \alpha$) e que o fator da interação não é significativo ($P > \alpha$). Dada essa confirmação, têm-se:

X2<-X^2 # Criar um vetor com os valores de X^2
XX2<-XX^2 # Criar um vetor com os valores de XX^2
mod.yy<-lm(YY~X+X2+XX+XX2) # Montar o modelo de regressão do 2º grau
anova(mod.yy) # Verificar pelo teste F que as variáveis X's são significativas

```
Analysis of Variance Table

Response: YY
          Df  Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
X          1 21.3384 21.3384 36.3878 0.000312 ***
X2         1  4.6555  4.6555  7.9389 0.022577 *
XX         1  9.3384  9.3384 15.9245 0.004002 **
XX2        1 10.1687 10.1687 17.3405 0.003147 **
Residuals  8  4.6913  0.5864
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

summary(mod.yy)

```
Call:
lm(formula = YY ~ X + X2 + XX + XX2)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.16867 -0.39089 -0.09298  0.30702  1.13236

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -1.438e+03  3.269e+02  -4.399  0.00229 **
X            4.603e+00  1.297e+00   3.548  0.00753 **
X2          -3.886e-02  1.178e-02  -3.298  0.01089 *
XX           1.641e+01  3.889e+00   4.220  0.00292 **
XX2         -4.906e-02  1.178e-02  -4.164  0.00315 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.7658 on 8 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.9065,     Adjusted R-squared: 0.8598
F-statistic:  19.4 on 4 and 8 DF,  p-value: 0.0003531
```

De acordo com os testes F e t, conclui-se que as variáveis X, X2, XX e XX2 exercem efeitos ($P < 0,05$) sobre YY.

Os coeficientes de regressão serão armazenados em uma variável, para serem usados na montagem da função de YY em função de X, X^2, XX e XX^2.

co.yy<-coef(mod.yy) # Armazenar os coeficientes no objeto co.yy

co.yy   # Visualizar os coeficientes

```
  (Intercept)            X            X2            XX           XX2
-1.438098e+03  4.602813e+00 -3.885936e-02  1.640811e+01 -4.906344e-02
```

Serão criados dois vetores (x e xx) contendo 15 coordenadas igualmente espaçadas por onde o plano será traçado pelos eixos X e XX, respectivamente:

x<-seq(min(X), max(X), (max(X) - min(X)) / 15)

xx<-seq(min(XX), max(XX), (max(XX) - min(XX)) / 15)

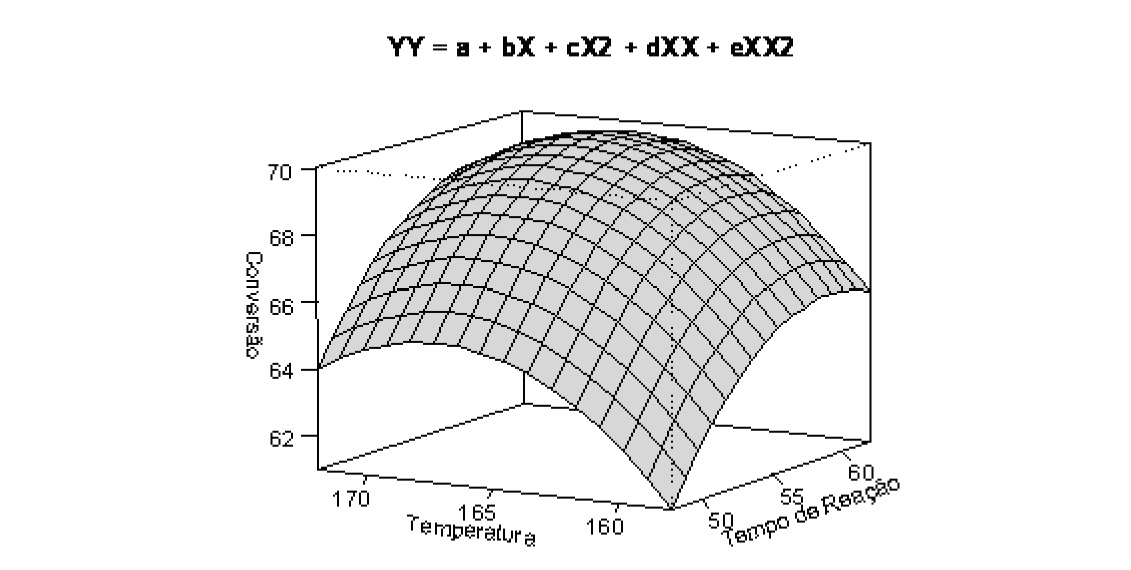
Agora será criada a função utilizando os coeficientes da regressão:

```
f.yy<-function(x,xx)
{co.yy[1]+co.yy[2]*x+co.yy[3]*x^2+co.yy[4]*xx+co.yy[5]*xx^2}
yy<-outer(x,xx,f.yy) # Fazer combinações de cada valor de x aos de xx com a função
```

A superfície de resposta (Figura 8) será construída em sua forma melhorada, da seguinte forma:

```
persp(x, xx, yy, main= "YY = a + bX + cX2 + dXX + eXX2", xlab= "Tempo de Reação", ylab= "Temperatura", zlab= "Conversão", col= "lightgrey", phi=10, theta=300, ticktype= "detailed", expand=0.75, d=20, r=10)
```

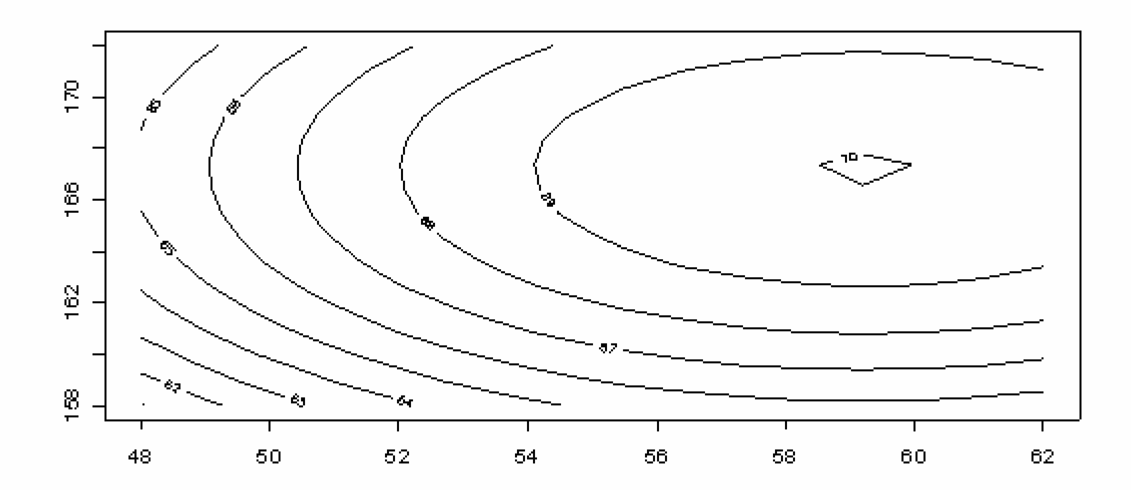
Figura 8. Superfície de resposta de YY em função de X e XX



Para construir o gráfico de contorno (Figura 9), será utilizado o seguinte comando:

```
contour(x,xx,yy)
```

Figura 9. Gráfico de contorno de YY em função de X e XX



2. Três Fatores

2.1. DIC

Como exemplo, considere o estudo dos efeitos de três fatores na tintura de um tecido misto de fibra de algodão e de fibra sintética, usado na fabricação de camisas. Três operadores (XXX), três máquinas (XX) e duas temperaturas (X) foram utilizados no estudo e três pequenos pedaços de tecido foram tingidos por tratamento segundo o delineamento inteiramente casualizado. Ao tecido tingido, foi atribuída uma nota de uma escala numérica (Tabela 5).

Tabela 5. Dados dos tecidos tingidos

	Temperatura					
	300 °C (baixa)			350 °C (alta)		
	Operador			Operador		
Máquina	A	B	C	A	B	C
1	23	27	31	24	38	34
	24	28	32	23	36	36
	25	26	28	28	35	39
2	36	34	33	37	34	34
	35	38	34	39	38	36

	36	39	35	35	36	31
3	28	35	26	26	36	28
	24	35	27	29	37	26
	27	34	25	25	34	34

Para fazer a entrada de dados, será utilizado o arquivo dados3f.csv que será lido da seguinte forma:

```
dados.3f<-read.csv2("dados3f.csv", dec= ".")
dados.3f
```

TRAT	X	XX	XXX	XXXX	Y
1	alta	1	A	1	34
2	alta	1	B	1	38
3	alta	1	C	1	34
4	alta	2	A	1	37
5	alta	2	B	1	34
6	alta	2	C	1	34
7	alta	3	A	1	26
8	alta	3	B	1	36
9	alta	3	C	1	28
10	baixa	1	A	1	23
11	baixa	1	B	1	27
12	baixa	1	C	1	31
13	baixa	2	A	1	36
14	baixa	2	B	1	34
15	baixa	2	C	1	33
16	baixa	3	A	1	28
17	baixa	3	B	1	35
18	baixa	3	C	1	26
1	alta	1	A	2	23
2	alta	1	B	2	36
3	alta	1	C	2	36
4	alta	2	A	2	39
5	alta	2	B	2	38
6	alta	2	C	2	36
7	alta	3	A	2	29
8	alta	3	B	2	37

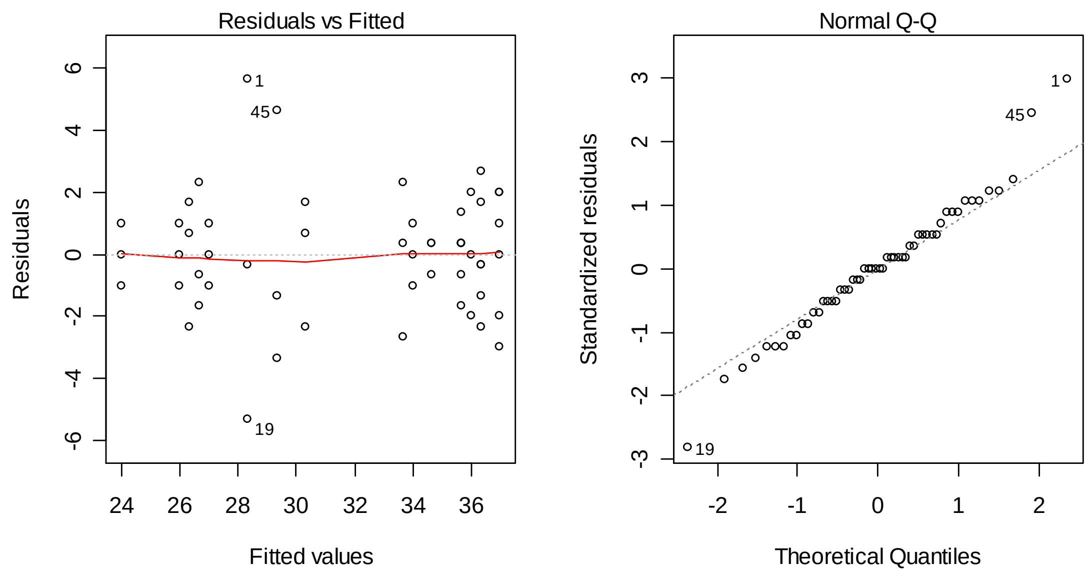
9	alta	3	C	2	26
10	baixa	1	A	2	24
11	baixa	1	B	2	28
12	baixa	1	C	2	32
13	baixa	2	A	2	35
14	baixa	2	B	2	38
15	baixa	2	C	2	34
16	baixa	3	A	2	24
17	baixa	3	B	2	35
18	baixa	3	C	2	27
1	alta	1	A	3	28
2	alta	1	B	3	35
3	alta	1	C	3	39
4	alta	2	A	3	35
5	alta	2	B	3	36
6	alta	2	C	3	31
7	alta	3	A	3	25
8	alta	3	B	3	34
9	alta	3	C	3	34
10	baixa	1	A	3	25
11	baixa	1	B	3	26
12	baixa	1	C	3	28
13	baixa	2	A	3	36
14	baixa	2	B	3	39
15	baixa	2	C	3	35
16	baixa	3	A	3	27
17	baixa	3	B	3	34
18	baixa	3	C	3	25

```
attach(dados.3f)
```

A montagem do modelo e as análises de resíduos serão feitos pelos seguintes comandos:

```
XXql<-factor(XX) # Criara um vetor qualitativo com os níveis de XX
mod.3f<-lm(Y~X*XXql*XXX)
re.3f<-residuals(mod.3f)
par(mfrow=c(1,2))
plot(mod.3f, which=c(1,2)) # Figura 10
```

Figura 10. Gráficos de resíduos



O teste de Lilliefors é dado por:

library(nortest)

lillie.test(re.3f)

```
        Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test

data:  re.3f
D = 0.0792, p-value = 0.543
```

O teste de Kolmogorov-Smirnov é dado por:

ks.test(re.3f, “pnorm”, mean=mean(re.3f), sd=sd(re.3f))

```
        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  re.3f
D = 0.0792, p-value = 0.887
alternative hypothesis: two.sided

Warning message:
cannot compute correct p-values with ties in: ks.test(re.3f, "pnorm",
mean = mean(re.3f), sd = sd(re.3f))
```

O teste de Bartlett é dado por:

bartlett.test(re.3f, TRAT)

```
        Bartlett test of homogeneity of variances

data:  re.3f and TRAT
Bartlett's K-squared = 20.1883, df = 17, p-value = 0.2647
```

Após ter verificado que para α = 0,05, os resíduos são normais e homogêneos, a anova é apresentada como segue:

anova(mod.3f)

```
Analysis of Variance Table

Response: Y
           Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
X           1  98.69   98.69 18.1877 0.0001383 ***
XXql        2 362.70  181.35 33.4232 6.224e-09 ***
XXX         2 207.81  103.91 19.1502 2.166e-06 ***
X:XXql      2 105.59   52.80  9.7304 0.0004185 ***
X:XXX       2   3.37    1.69  0.3106 0.7349659
XXql:XXX    4 253.19   63.30 11.6655 3.545e-06 ***
X:XXql:XXX  4  27.85    6.96  1.2833 0.2947013
Residuals  36 195.33    5.43
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Os gráficos das interações significativas, X x XXql (P<0,05) e XXql x XXX (P<0,05), podem ser obtidos por meio de:

interaction.plot(X,XXql,Y)   # Figura 11

interaction.plot(XXql, XXX,Y)   # Figura 12

Figura 11. Gráfico da interação entre os fatores X e XXql

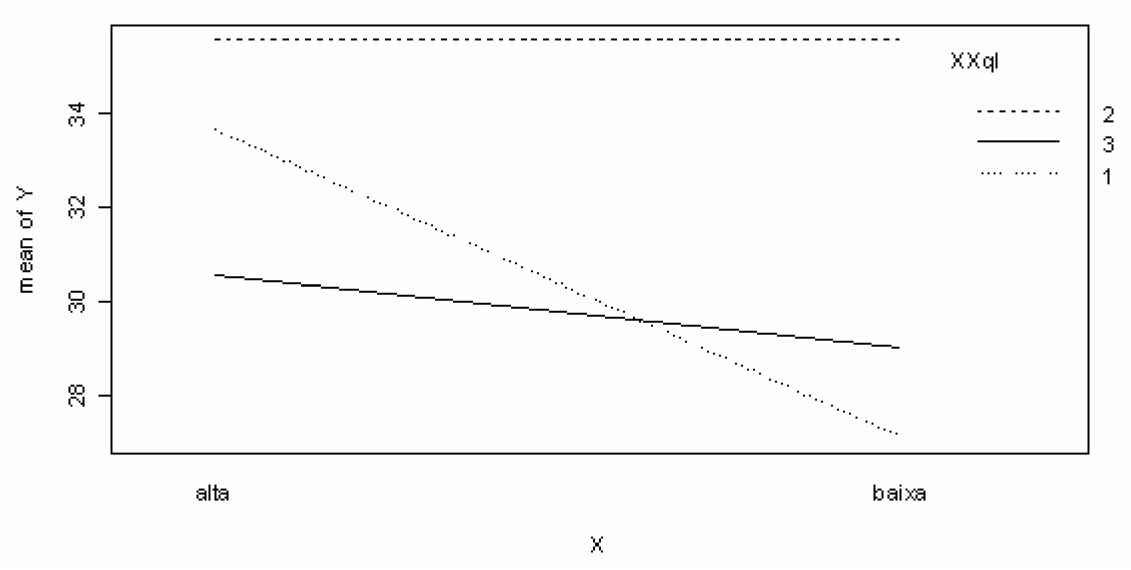
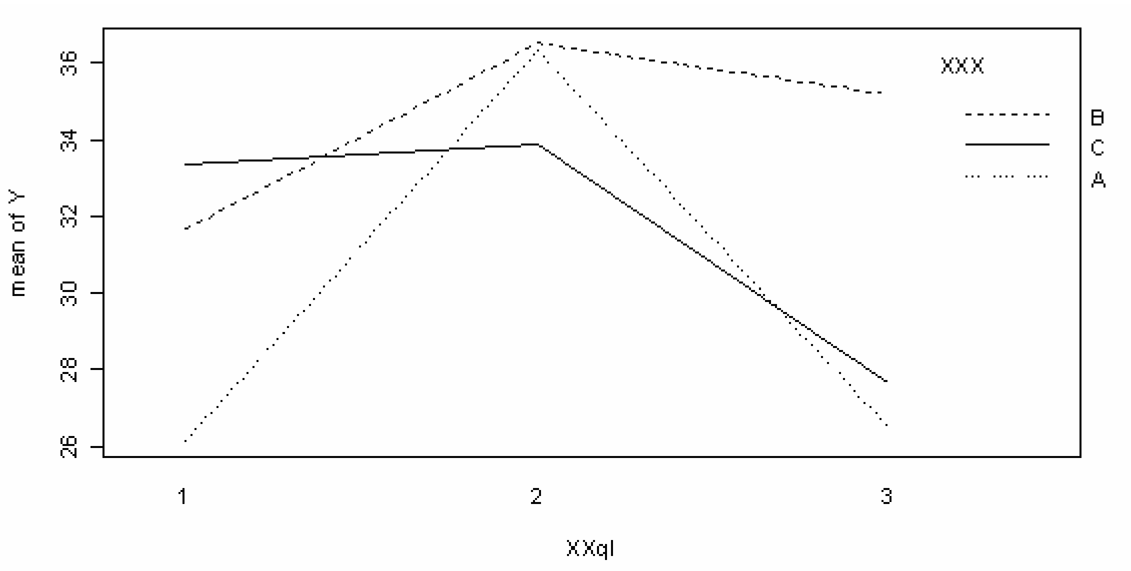


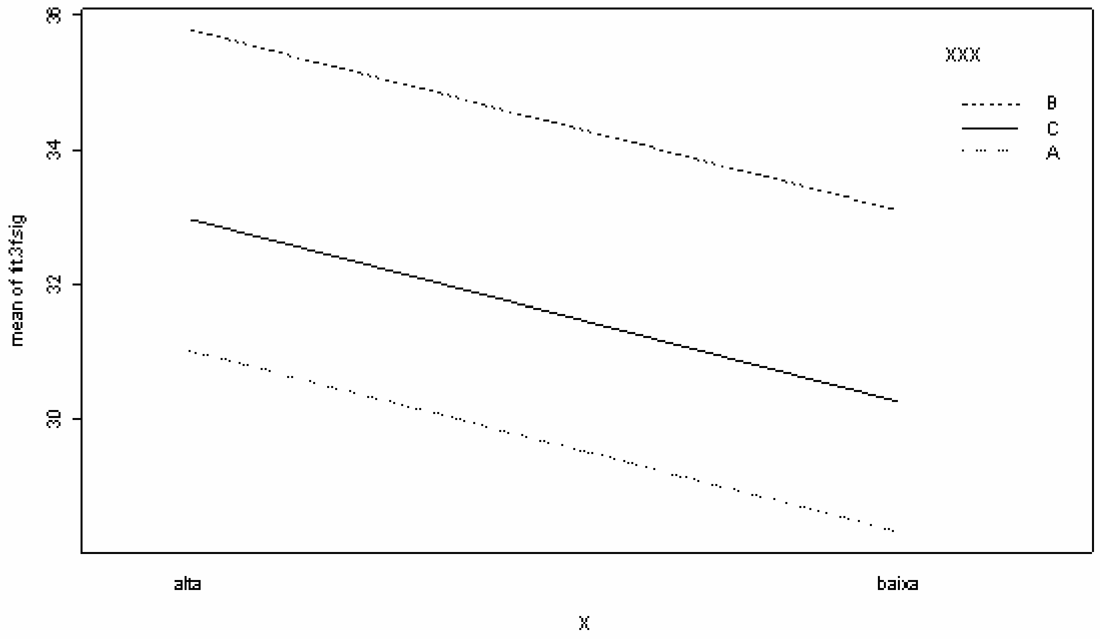
Figura 12. Gráfico da interação entre os fatores XXql e XXX



Já o gráfico da interação X x XXX (P>0,05), não significativa, deve ser construído da seguinte forma:

```
# Retirar os fatores não significativos
mod.3f.sig<-lm(Y~X+XXql+XXX+X:XXql+XXql:XXX)
re.3f.sig<-residuals(mod.3f.sig)    # Resíduos do modelo
fit.3f.sig<-Y-re.3f.sig                    # Valor de Y ajustado pelo modelo
interaction.plot(X, XXX, fit.3f.sig)   # Gráfico da interação com os valores ajustados
```

Figura 13. Gráfico da interação entre os fatores X e XXX



2.2. DBC

Como exemplo será utilizado os mesmos dados apresentados no tópico anterior. Porém os níveis de XXXX serão considerados como blocos. O modelo completo e as análises de resíduos serão feitos da seguinte forma:

```
XXql<-factor(XX) # Criar um vetor qualitativo com os níveis de XX
XXXXql<-factor(XXXX)  # Criar um vetor qualitativo com os níveis de XXXX
mod.3fdbc<-lm(Y~X*XXql*XXX+XXXXql)
re.3fdbc<-residuals(mod.3fdbc)
par(mfrow=c(1,2))
plot(mod.3fdbc, which=c(1,2))
# Teste de Lilliefors
library(nortest)
lillie.test(re.3fdbc)
# Teste de Kolmogorov-Smirnov
ks.test(re.3fdbc, "pnorm", mean=mean(re.3fdbc), sd=sd(re.3fdbc))
# Teste de Bartlett
```

bartlett.test(re.3fdbc, TRAT)

Verificado que, para α = 0,05, os resíduos são normais (P > 0,05) e homogêneos (P > 0,05), a anova é apresentada como segue:

anova(mod.3fdbc)

```
Analysis of Variance Table

Response: Y
           Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
X           1  98.69   98.69 17.2394  0.000209 ***
XXql        2 362.70  181.35 31.6805 1.708e-08 ***
XXX         2 207.81  103.91 18.1517 4.331e-06 ***
XXXXql      2   0.70    0.35  0.0615  0.940490
X:XXql      2 105.59   52.80  9.2230  0.000631 ***
X:XXX       2   3.37    1.69  0.2944  0.746868
XXql:XXX    4 253.19   63.30 11.0573 7.476e-06 ***
X:XXql:XXX  4  27.85    6.96  1.2164  0.321995
Residuals  34 194.63    5.72
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Os gráficos das interações X x XXql (P<0,05) e XXql x XXX (P<0,05), podem ser obtidos por meio de:

interaction.plot(X,XXql,Y)
interaction.plot(XXql, XXX,Y)

E, o gráfico da interação X x XXX (P>0,05), não significativa, deve ser construído da seguinte forma:

# Retirar os fatores não significativos
mod.3fdbc.sig<-lm(Y~X+XXql+XXX+X:XXql+XXql:XXX)
re.3fdbc.sig<-residuals(mod.3fdbc.sig)   # Resíduos do modelo
fit.3fdbc.sig<-Y-re.3fdbc.sig   # Valor de Y ajustado pelo modelo
interaction.plot(X, XXX, fit.3fdbc.sig)   # Gráfico da interação com os valores ajustados